

Construction d'approximations effectives pour des EDPs multiéchelles à partir d'informations limitées

Simon Ruget

Supervision : Claude Le Bris, Frédéric Legoll

Soutenance de thèse
2 décembre 2025

Introduction générale

Systèmes multiéchelles

Les systèmes multiéchelles sont caractérisés par la présence de plusieurs échelles d'intérêt qui interagissent et s'influencent entre elles.

On les retrouve dans des disciplines variées : l'ingénierie, la biologie, la physique, ...



aile d'avion $\approx 10\text{m}$

v.s.



fibre de carbone $\approx 10^{-6}\text{m}$

Figure: Matériau composite utilisé dans l'industrie aéronautique.

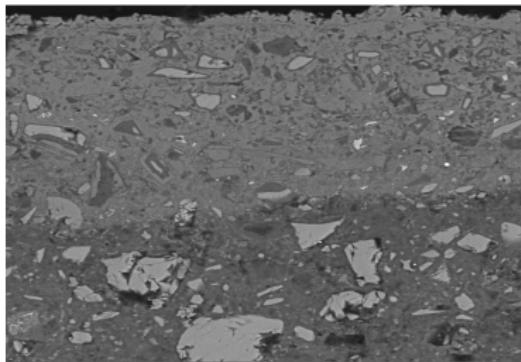
Systèmes multiéchelles

Les systèmes multiéchelles sont caractérisés par la présence de plusieurs échelles d'intérêt qui interagissent et s'influencent entre elles.

On les retrouve dans des disciplines variées : l'ingénierie, la biologie, la physique, ...



pont $\approx 10^3$ m



v.s. aggrégats minéraux $\approx 10^{-5}$ m

Figure: Le béton, un matériau multiéchelle.

Approximation d'une EDP multiéchelle

- Considérons le problème

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega,$$

où A_ε a une taille caractéristique de variation $\varepsilon \ll |\Omega|$.

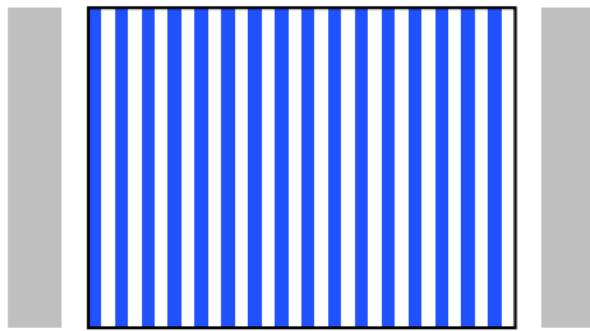
Approximation d'une EDP multiéchelle

- Considérons le problème

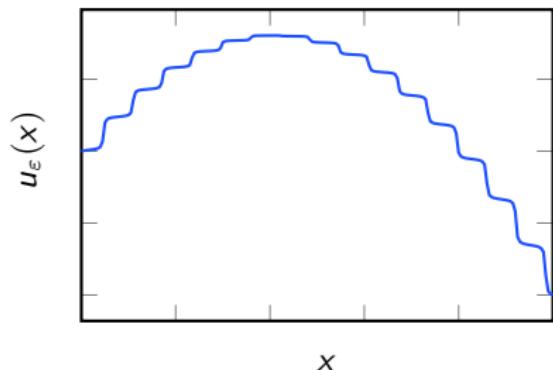
$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega,$$

où A_ε a une taille caractéristique de variation $\varepsilon \ll |\Omega|$.

- Applications : transfert thermique, (simplification de) problème d'élasticité en mécanique, ...



- $A_\varepsilon = 0.023$
- $A_\varepsilon = 380$



Approximation d'une EDP multiéchelle

- Considérons le problème

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega,$$

où A_ε a une taille caractéristique de variation $\varepsilon \ll |\Omega|$.

Objectif

À partir de mesures du système, construisons une approximation de l'opérateur

$$\mathcal{L}_\varepsilon : f \rightarrow u_\varepsilon(f).$$

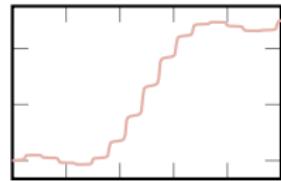
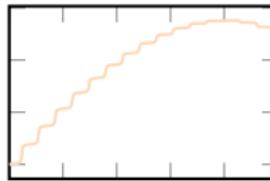
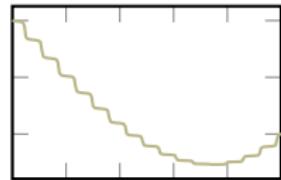
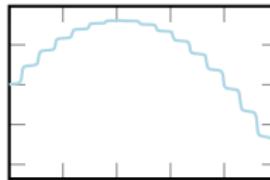
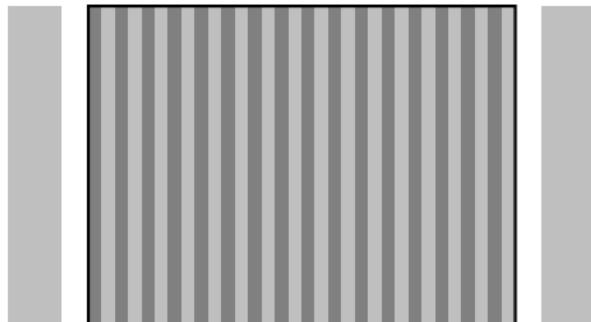
Information limitée

Contexte expérimental :

- peu de connaissance sur la microstructure.
- disponibilité de couples (configuration, réponse du système).

Contexte d'informations limitées :

- pas d'hypothèses sur la microstructure (cas non périodique, ε petit mais pas infinitésimale petit, ...).
- Restrictions qualitatives (mesures grossières, mesures bruitées, ...).
- Restrictions quantitatives (budget limité de mesures).



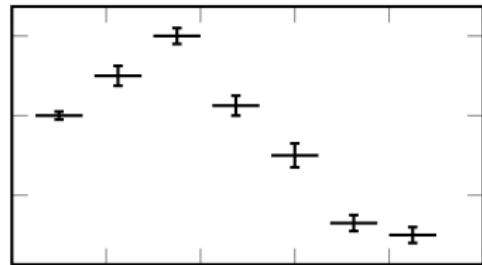
Information limitée

Contexte expérimental :

- peu de connaissance sur la microstructure.
- disponibilité de couples (configuration, réponse du système).

Contexte d'informations limitées :

- pas d'hypothèses sur la microstructure (cas non périodique, ε petit mais pas infinitésimale petit, ...).
- Restrictions qualitatives (mesures grossières, mesures bruitées, ...).
- Restrictions quantitatives (budget limité de mesures).



Caractère mal-posé des problèmes inverses multiéchelles

¹Bensoussan, Lions, Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, 1978.

Caractère mal-posé des problèmes inverses multiéchelles

Dans le contexte multiéchelle, l'identification de A_ε est un problème mal posé.

¹Bensoussan, Lions, Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, 1978.

Caractère mal-posé des problèmes inverses multiéchelles

Dans le contexte multiéchelle, l'identification de A_ε est un problème mal posé.

La théorie de l'homogénéisation (voir par ex. [BLP78]¹) approche les EDPs fortement hétérogènes par des EDP impliquant des coefficients lentement variables.

¹Bensoussan, Lions, Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, 1978.

Caractère mal-posé des problèmes inverses multiéchelles

Dans le contexte multiéchelle, l'identification de A_ε est un problème mal posé.

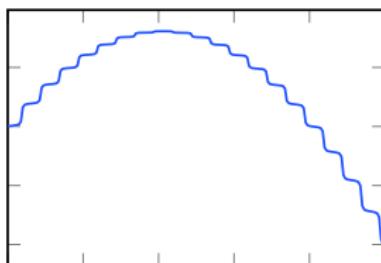
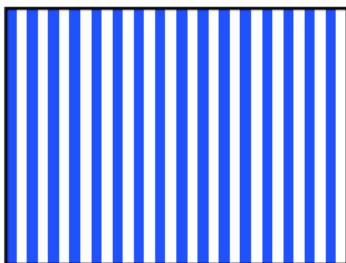
La théorie de l'homogénéisation (voir par ex. [BLP78]¹) approche les EDPs fortement hétérogènes par des EDP impliquant des coefficients lentement variables.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Système oscillant

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} -\operatorname{div}(A_\star \nabla u_\star) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\star = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Système homogénéisé



¹Bensoussan, Lions, Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, 1978.

Caractère mal-posé des problèmes inverses multiéchelles

Dans le contexte multiéchelle, l'identification de A_ε est un problème mal posé.

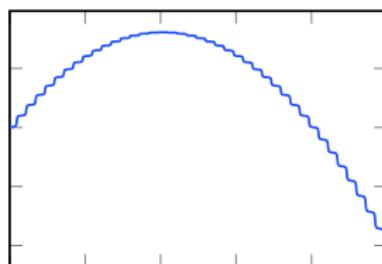
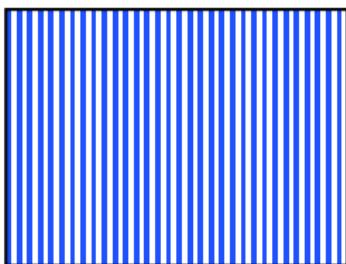
La théorie de l'homogénéisation (voir par ex. [BLP78]¹) approche les EDPs fortement hétérogènes par des EDP impliquant des coefficients lentement variables.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Système oscillant

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} -\operatorname{div}(A_\star \nabla u_\star) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\star = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Système homogénéisé



¹Bensoussan, Lions, Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, 1978.

Caractère mal-posé des problèmes inverses multiéchelles

Dans le contexte multiéchelle, l'identification de A_ε est un problème mal posé.

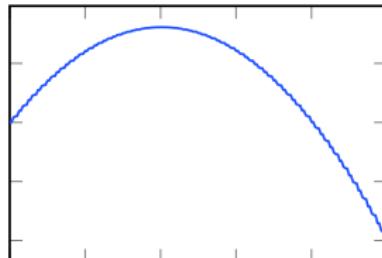
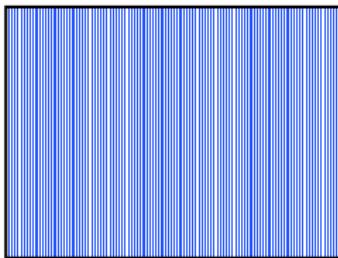
La théorie de l'homogénéisation (voir par ex. [BLP78]¹) approche les EDPs fortement hétérogènes par des EDP impliquant des coefficients lentement variables.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Système oscillant

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} -\operatorname{div}(A_\star \nabla u_\star) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\star = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Système homogénéisé



¹Bensoussan, Lions, Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, 1978.

Caractère mal-posé des problèmes inverses multiéchelles

Dans le contexte multiéchelle, l'identification de A_ε est un problème mal posé.

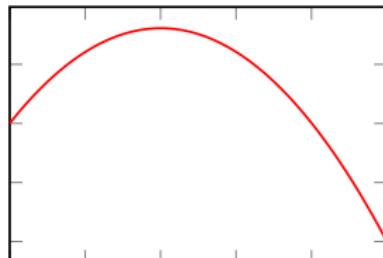
La théorie de l'homogénéisation (voir par ex. [BLP78]¹) approche les EDPs fortement hétérogènes par des EDP impliquant des coefficients lentement variables.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Système oscillant

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} -\operatorname{div}(A_\star \nabla u_\star) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\star = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Système homogénéisé



¹Bensoussan, Lions, Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, 1978.

Caractère mal-posé des problèmes inverses multiéchelles

Dans le contexte multiéchelle, l'identification de A_ε est un problème mal posé.

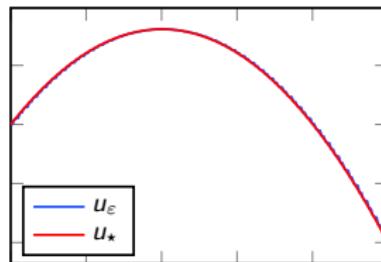
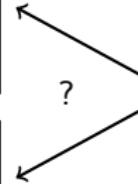
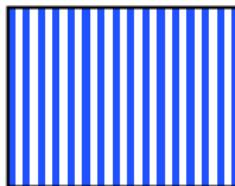
La théorie de l'homogénéisation (voir par ex. [BLP78]¹) approche les EDPs fortement hétérogènes par des EDP impliquant des coefficients lentement variables.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Système oscillant

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} -\operatorname{div}(A_\star \nabla u_\star) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\star = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Système homogénéisé



¹Bensoussan, Lions, Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, 1978.

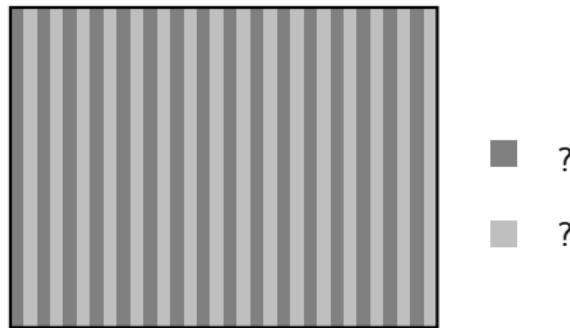
Différentes approches

- **Reconstuire A_ε**
 - ↳ Problème mal posé en général (Lions 1976), sauf si...

Différentes approches

- **Reconstuire A_ε**

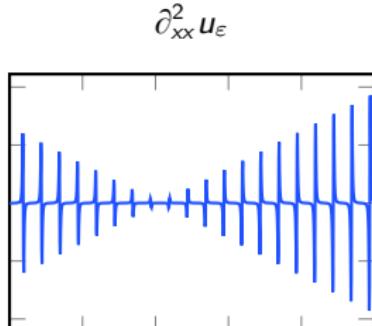
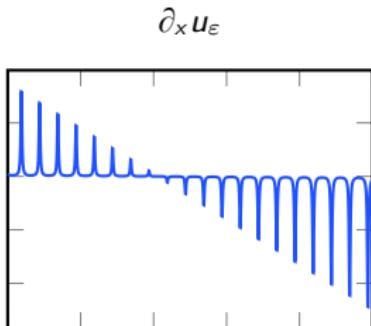
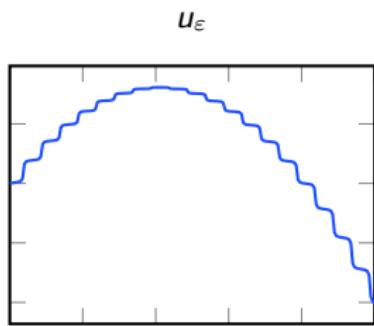
- ↳ Problème mal posé en général (Lions 1976), sauf si...
- ↳ hypothèses fortes sur la microstructure (Engquist & Frederick 2017, Abdulle & Di Blasio 2019, Lochner & Peter 2023),



Différentes approches

- **Reconstuire A_ε**

- ↳ Problème mal posé en général (Lions 1976), sauf si...
- ↳ hypothèses fortes sur la microstructure (Engquist & Frederick 2017, Abdulle & Di Blasio 2019, Lochner & Peter 2023),
- ↳ disponibilité de données à la petite échelle (Bal & Uhlmann 2013).



Différentes approches

- **Reconstuire A_ε**
 - ↳ Problème mal posé en général (Lions 1976), sauf si...
 - ↳ hypothèses fortes sur la microstructure (Engquist & Frederick 2017, Abdulle & Di Blasio 2019, Lochner & Peter 2023),
 - ↳ disponibilité de données à la petite échelle (Bal & Uhlmann 2013).
 - **Approximation de l'opérateur $\mathcal{L}_\varepsilon : f \rightarrow u_\varepsilon(f)$**
-

Différentes approches

- Reconstuire A_ε
 - ↳ Problème mal posé en général (Lions 1976), sauf si...
 - ↳ hypothèses fortes sur la microstructure (Engquist & Frederick 2017, Abdulle & Di Blasio 2019, Lochner & Peter 2023),
 - ↳ disponibilité de données à la petite échelle (Bal & Uhlmann 2013).

- Approximation de l'opérateur $\mathcal{L}_\varepsilon : f \rightarrow u_\varepsilon(f)$
 - ↳ Coefficients effectifs (Nolen & Papanicolaou 2009, Le Bris & al. 2018).

Différentes approches

- Reconstuire A_ε
 - ↳ Problème mal posé en général (Lions 1976), sauf si...
 - ↳ hypothèses fortes sur la microstructure (Engquist & Frederick 2017, Abdulle & Di Blasio 2019, Lochner & Peter 2023),
 - ↳ disponibilité de données à la petite échelle (Bal & Uhlmann 2013).

- Approximation de l'opérateur $\mathcal{L}_\varepsilon : f \rightarrow u_\varepsilon(f)$
 - ↳ Coefficients effectifs (Nolen & Papanicolaou 2009, Le Bris & al. 2018).
 - ↳ Calibration de modèles (Chung & al. 2019, Peterseim & al. 2020).

Différentes approches

- Reconstuire A_ε
 - ↳ Problème mal posé en général (Lions 1976), sauf si...
 - ↳ hypothèses fortes sur la microstructure (Engquist & Frederick 2017, Abdulle & Di Blasio 2019, Lochner & Peter 2023),
 - ↳ disponibilité de données à la petite échelle (Bal & Uhlmann 2013).

- Approximation de l'opérateur $\mathcal{L}_\varepsilon : f \rightarrow u_\varepsilon(f)$
 - ↳ Coefficients effectifs (Nolen & Papanicolaou 2009, Le Bris & al. 2018).
 - ↳ Calibration de modèles (Chung & al. 2019, Peterseim & al. 2020).
 - ↳ Operator learning (Stuart & al. 2024).

Différentes approches

- Reconstuire A_ε
 - ↳ Problème mal posé en général (Lions 1976), sauf si...
 - ↳ hypothèses fortes sur la microstructure (Engquist & Frederick 2017, Abdulle & Di Blasio 2019, Lochner & Peter 2023),
 - ↳ disponibilité de données à la petite échelle (Bal & Uhlmann 2013).

- Approximation de l'opérateur $\mathcal{L}_\varepsilon : f \rightarrow u_\varepsilon(f)$
 - ↳ Coefficients effectifs (Nolen & Papanicolaou 2009, Le Bris & al. 2018).
 - ↳ Calibration de modèles (Chung & al. 2019, Peterseim & al. 2020).
 - ↳ Operator learning (Stuart & al. 2024).

Problème : comment adapter ces approches dans des contextes d'informations limitées ?

Coefficient effectif

Un coefficient effectif est un coefficient variant à l'échelle macroscopique, qui encapsule les effets des variations à l'échelle microscopique des coefficients oscillants.

Coefficient effectif

Un coefficient effectif est un coefficient variant à l'échelle macroscopique, qui encapsule les effets des variations à l'échelle microscopique des coefficients oscillants.

Exemple. L'homogénéisation assure l'existence d'un **coefficient effectif A_*** tel que

$$\mathcal{L}_\varepsilon : f \longrightarrow u_\varepsilon(f) \quad \text{sol. de } -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f$$

$$\downarrow \circlearrowleft$$

$$\mathcal{L}_{A_*} : f \longrightarrow u_*(f) \quad \text{sol. de } -\operatorname{div}(A_* \nabla u_*) = f$$

par rapport à la norme $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.

Coefficient effectif

Un coefficient effectif est un coefficient variant à l'échelle macroscopique, qui encapsule les effets des variations à l'échelle microscopique des coefficients oscillants.

Exemple. L'homogénéisation assure l'existence d'un **coefficient effectif** A_\star tel que

$$\mathcal{L}_\varepsilon : f \longrightarrow u_\varepsilon(f) \quad \text{sol. de } -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}_{A_\star} : f \longrightarrow u_\star(f) \quad \text{sol. de } -\operatorname{div}(A_\star \nabla u_\star) = f$$

par rapport à la norme $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.

Dans le cas périodique où $A_\varepsilon(x) = A_{\text{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, avec A_{per} Q -périodique :

$$A_\star = \int_Q A_{\text{per}}(\nabla w + \operatorname{Id}),$$

avec w un correcteur défini comme solution d'une EDP impliquant A_{per} .

En particulier, en dimension $d = 1$, on a $A_\star = \left(\int_Q \frac{1}{A_{\text{per}}}\right)^{-1}$.

Coefficient effectif

Un coefficient effectif est un coefficient variant à l'échelle macroscopique, qui encapsule les effets des variations à l'échelle microscopique des coefficients oscillants.

Exemple. L'homogénéisation assure l'existence d'un **coefficient effectif** A_* tel que

$$\mathcal{L}_\varepsilon : f \longrightarrow u_\varepsilon(f) \quad \text{sol. de } -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f$$



$$\mathcal{L}_{A_*} : f \longrightarrow u_*(f) \quad \text{sol. de } -\operatorname{div}(A_* \nabla u_*) = f$$

par rapport à la norme $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.

Deux limites principales de l'homogénéisation :

- Pas de formules pour A_* dans le cas général.
- Validité dans le régime asymptotique des échelles séparées (i.e. $\varepsilon \rightarrow 0$).

Objectif

À partir de l'information disponible, définissons un opérateur effectif $-\operatorname{div}(\bar{A}\nabla \cdot)$ tel que, pour tout f , les solutions $u_\varepsilon(f)$ de

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f$$

soient bien approchées par les solutions $\bar{u} = u(\bar{A}, f)$ du problème grossier

$$-\operatorname{div}(\bar{A}\nabla \bar{u}) = f.$$

- Partie I** • Construire \bar{A} dans l'ensemble $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$.
- Partie II** • Identifier \bar{A} au voisinage d'un coefficient \bar{A}_0 connu.
- Partie III** • Sélectionner \bar{A} au sein une liste finie $\mathcal{A} = \{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_N\}$.

Vue d'ensemble

Objectif

À partir de l'information disponible, définissons un opérateur effectif $-\operatorname{div}(\bar{A}\nabla \cdot)$ tel que, pour tout f , les solutions $u_\varepsilon(f)$ de

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f$$

soient bien approchées par les solutions $\bar{u} = u(\bar{A}, f)$ du problème grossier

$$-\operatorname{div}(\bar{A}\nabla \bar{u}) = f.$$

Partie I • Construire \bar{A} dans l'ensemble $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$.

Partie II • Identifier \bar{A} au voisinage d'un coefficient \bar{A}_0 connu.

Partie III • Sélectionner \bar{A} au sein une liste finie $\mathcal{A} = \{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_N\}$.

Partie IV • Approximation effective pour une équation de Schrödinger).

Partie I

Approximation effective à partir de mesures de bords agrégées

Une preuve de concept [CRAS2013]², [COCV2018]³

Pour tout $g \in L_0^2(\partial\Omega)$, on considère la solution $u_\varepsilon = u_\varepsilon(g)$ de moyenne nulle de

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1)$$

²C. Le Bris, F. Legoll, K. Li, CRAS, 2013.

³C. Le Bris, F. Legoll, S. Lemaire, ESAIM COCV, 2018.

Une preuve de concept [CRAS2013]², [COCV2018]³

Pour tout $g \in L_0^2(\partial\Omega)$, on considère la solution $u_\varepsilon = u_\varepsilon(g)$ de moyenne nulle de

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1)$$

Soit $\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ un coefficient *constant* symétrique, on considère $\bar{u} = u(\bar{A}, g)$ la solution de

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\bar{A} \nabla \bar{u}) \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2)$$

²C. Le Bris, F. Legoll, K. Li, CRAS, 2013.

³C. Le Bris, F. Legoll, S. Lemaire, ESAIM COCV, 2018.

Une preuve de concept [CRAS2013]², [COCV2018]³

Pour tout $g \in L_0^2(\partial\Omega)$, on considère la solution $u_\varepsilon = u_\varepsilon(g)$ de moyenne nulle de

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1)$$

Soit $\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ un coefficient *constant* symétrique, on considère $\bar{u} = u(\bar{A}, g)$ la solution de

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\bar{A} \nabla \bar{u}) \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2)$$

La qualité de \bar{A} en tant que coefficient effectif peut être quantifiée via la fonctionnelle

$$\sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} \|u_\varepsilon(g) - u(\bar{A}, g)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Une stratégie consiste à **minimiser** le **scénario du pire des cas** en considérant le problème d'optimisation

$$\inf_{\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}} \sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} \|u_\varepsilon(g) - u(\bar{A}, g)\|_{L^2(\Omega)}.$$

²C. Le Bris, F. Legoll, K. Li, CRAS, 2013.

³C. Le Bris, F. Legoll, S. Lemaire, ESAIM COCV, 2018.

Une preuve de concept [CRAS2013]², [COCV2018]³

Pour tout $g \in L_0^2(\partial\Omega)$, on considère la solution $u_\varepsilon = u_\varepsilon(g)$ de moyenne nulle de

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1)$$

Soit $\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ un coefficient *constant symétrique*, on considère $\bar{u} = u(\bar{A}, g)$ la solution de

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\bar{A} \nabla \bar{u}) \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2)$$

La qualité de \bar{A} en tant que coefficient effectif peut être quantifiée via la fonctionnelle

$$\sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} \|u_\varepsilon(g) - u(\bar{A}, g)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Une stratégie consiste à **minimiser** le **scénario du pire des cas** en considérant le problème d'optimisation

$$\inf_{\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}} \sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} \|u_\varepsilon(g) - u(\bar{A}, g)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Constats : Utiliser la **mesure complète de solutions** u_ε dans le domaine Ω semble **disproportionné** pour estimer un coefficient constant symétrique de taille $d \times d$, et **irréaliste** du point de vue expérimental.

²C. Le Bris, F. Legoll, K. Li, CRAS, 2013.

³C. Le Bris, F. Legoll, S. Lemaire, ESAIM COCV, 2018.

Un choix pratique d'observable

En pratique, on a accès à des observables plus *grossières*.
Considérons par exemple l'énergie

$$\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - \int_{\partial\Omega} g u_\varepsilon(g) = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} g u_\varepsilon(g). \quad (3)$$

Un choix pratique d'observable

En pratique, on a accès à des observables plus *grossières*.
Considérons par exemple l'énergie

$$\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - \int_{\partial\Omega} g u_\varepsilon(g) = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} g u_\varepsilon(g). \quad (3)$$

Motivation :

- $\mathcal{E}(A_\varepsilon, g)$ admet une **limite homogénéisée** :

$$\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}(A_*, g) \text{ in } \mathbb{R},$$

où $\mathcal{E}(A_*, g) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_* \nabla u_* \cdot \nabla u_* - \int_{\partial\Omega} g u_*$ et où u_* est la solution homogénéisée.

- $\mathcal{E}(A_\varepsilon, g)$ est une **quantité intégrée au bord du domaine**. Elle présente donc les caractéristiques d'une quantité expérimentalement accessible.
- $\mathcal{E}(A_\varepsilon, g)$ est un scalaire. Elle apporte donc **peu d'informations sur la microéchelle**.

Une nouvelle formulation

Soit $\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ un coefficient symétrique *constant*, on considère $\bar{u} = u(\bar{A}, g)$ la solution de

$$-\operatorname{div}(\bar{A}\nabla \bar{u}) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\bar{A}\nabla \bar{u}) \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

Une nouvelle formulation

Soit $\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ un coefficient symétrique *constant*, on considère $\bar{u} = u(\bar{A}, g)$ la solution de

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\bar{A} \nabla \bar{u}) \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

La qualité de \bar{A} en tant que coefficient effectif peut être quantifiée via la fonctionnelle

$$\sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} \|u_\varepsilon(g) - u(\bar{A}, g)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow \sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|^2.$$

Une nouvelle formulation

Soit $\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ un coefficient symétrique *constant*, on considère $\bar{u} = u(\bar{A}, g)$ la solution de

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\bar{A} \nabla \bar{u}) \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

La qualité de \bar{A} en tant que coefficient effectif peut être quantifiée via la fonctionnelle

$$\sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} \|u_\varepsilon(g) - u(\bar{A}, g)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow \sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|^2.$$

Notre stratégie consiste à **minimiser** le **scénario du pire des cas** en considérant le problème d'optimisation

$$\inf_{\substack{\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \\ \alpha \leq \bar{A} \leq \beta}} \sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|^2.$$

Analyse théorique

Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, le problème conduit à considérer le coefficient homogénéisé.

$$I_\varepsilon = \inf_{\substack{\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \\ \alpha \leq \bar{A} \leq \beta}} \underbrace{\sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|^2}_{J_\varepsilon(\bar{A})}$$

Proposition (Consistance asymptotique dans le cas périodique)

Pour toutes séquences de quasi-minimiseurs $(\bar{A}_\varepsilon^\#)_{\varepsilon > 0}$, i.e. toutes séquences telles que

$$I_\varepsilon \leq J_\varepsilon(\bar{A}_\varepsilon^\#) \leq I_\varepsilon + \text{err}(\varepsilon),$$

on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{A}_\varepsilon^\# = A_\star. \tag{4}$$

Schéma de preuve

Trois étapes :

- Optimisation sur un ensemble compact $S_{\alpha,\beta} \implies \overline{A}_\varepsilon^\#$ converge vers $\overline{A}_\#$ à extraction près.

Schéma de preuve

Trois étapes :

- Optimisation sur un ensemble compact $\mathcal{S}_{\alpha,\beta} \implies \overline{A}_\varepsilon^\#$ converge vers $\overline{A}_\#$ à extraction près.
- Homogénéisation $\implies \mathcal{E}_\varepsilon(g) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\star(g) \implies I_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \implies \mathcal{E}_\varepsilon(g) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\#(g).$

Une relation de polarisation implique que pour tout $f, g \in L_0^2(\partial\Omega)$:

$$\int_{\partial\Omega} f \ u(A_\star, g) = \int_{\partial\Omega} f \ u(\overline{A}_\#, g).$$

Ainsi,

$$u(A_\star, g) = u(\overline{A}_\#, g) \text{ dans } L^2(\partial\Omega). \quad (5)$$

Schéma de preuve

Trois étapes :

- Optimisation sur un ensemble compact $\mathcal{S}_{\alpha,\beta} \implies \overline{A}_\varepsilon^\#$ converge vers $\overline{A}_\#$ à extraction près.
- Homogénéisation $\implies \mathcal{E}_\varepsilon(g) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\star(g) \implies I_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \implies \mathcal{E}_\varepsilon(g) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\#(g).$

Une relation de polarisation implique que pour tout $f, g \in L_0^2(\partial\Omega)$:

$$\int_{\partial\Omega} f \ u(A_\star, g) = \int_{\partial\Omega} f \ u(\overline{A}_\#, g).$$

Ainsi,

$$u(A_\star, g) = u(\overline{A}_\#, g) \text{ dans } L^2(\partial\Omega). \quad (5)$$

- Comme A_\star et $\overline{A}_\#$ sont des coefficients constants et en exploitant (5) évaluée en des chargements particuliers $(g_i)_{1 \leq i \leq \frac{d(d+1)}{2}}$, on conclut que

$$A_\star = A_\#.$$

Méthode de résolution

On applique un **algorithme itératif** pour résoudre

$$\inf_{\substack{\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \\ \alpha \leq \bar{A} \leq \beta}} \sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|^2.$$

Méthode de résolution

On applique un **algorithme itératif** pour résoudre

$$\inf_{\substack{\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \\ \alpha \leq \bar{A} \leq \beta}} \sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|^2.$$

Pour une itérée \bar{A}^n ,

- ➊ Définir g^n , l'argsup de

$$\sup_{\substack{g \text{ s.t. } \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1}} (\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}^n, g))^2.$$

- ➋ Définir \bar{A}^{n+1} , le minimiseur de

$$\inf_{\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}} (\mathcal{E}(A_\varepsilon, g^n) - \mathcal{E}(\bar{A}, g^n))^2.$$

Méthode de résolution

On applique un **algorithme itératif** pour résoudre

$$\inf_{\substack{\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \\ \alpha \leq \bar{A} \leq \beta}} \sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|^2.$$

Pour une itérée \bar{A}^n ,

- ➊ Définir g^n , l'argsup de

$$\sup_{\substack{g \text{ s.t.} \\ \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1}} \left(\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}^n, g) \right)^2.$$

En pratique, $\sup_{g \in L_0^2(\Omega)} \rightarrow \sup_{g \in V_P}$ sur $V_P = \text{Span}\{P \text{ chargements}\}$, avec $P \approx \frac{d(d+1)}{2}$.

Cette étape nécessite le calcul de P solutions d'une EDP coarse, afin de calculer les énergies $\mathcal{E}(\bar{A}^n, \cdot)$.

On résout ensuite un problème au valeurs propres de taille $P \times P$.

- ➋ Définir \bar{A}^{n+1} , le minimiseur de

$$\inf_{\bar{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}} (\mathcal{E}(A_\varepsilon, g^n) - \mathcal{E}(\bar{A}, g^n))^2.$$

En pratique, on applique une descente de gradient avec pas adaptatif.

La direction de descente s'exprime à l'aide des solutions calculées à l'étape 1, donc il n'y a pas de coûts supplémentaires.

Choix des chargements

On identifie P chargements $(g_i)_{1 \leq i \leq P}$ tels que

$$\sup_{g \in L_0^2(\partial\Omega)} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)| \approx \sup_{\substack{g \in \text{Span } (g_i) \\ 1 \leq i \leq P}} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|.$$

Choix des chargements

On identifie P chargements $(g_i)_{1 \leq i \leq P}$ tels que

$$\sup_{g \in L_0^2(\partial\Omega)} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)| \approx \sup_{\substack{g \in \text{Span } (g_i) \\ 1 \leq i \leq P}} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|.$$

Quotient de Rayleigh : on optimise

$$\sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)| = \sup_{g \in L_0^2(\partial\Omega)} \left| \frac{\int_{\partial\Omega} g (\mathcal{T}_\varepsilon - \mathcal{T}_{\bar{A}}) g}{\int_{\partial\Omega} g^2} \right|,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varepsilon : g \in L_0^2(\partial\Omega) &\longrightarrow u_\varepsilon(g)|_{\partial\Omega} && \text{avec } u_\varepsilon(g) \text{ sol. de (1),} \\ \mathcal{T}_{\bar{A}} : g \in L_0^2(\partial\Omega) &\longrightarrow u(\bar{A}, g)|_{\partial\Omega} && \text{avec } u(\bar{A}, g) \text{ sol. de (2).} \end{aligned}$$

Ainsi, on cherche les modes propres de $\mathcal{T}_\varepsilon - \mathcal{T}_{\bar{A}}$ associés aux plus grandes valeurs propres en valeur absolue.

Choix des chargements

On identifie P chargements $(g_i)_{1 \leq i \leq P}$ tels que

$$\sup_{g \in L_0^2(\partial\Omega)} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)| \approx \sup_{\substack{g \in \text{Span } (g_i) \\ 1 \leq i \leq P}} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|.$$

Quotient de Rayleigh : on optimise

$$\sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)| = \sup_{g \in L_0^2(\partial\Omega)} \left| \frac{\int_{\partial\Omega} g (\mathcal{T}_\varepsilon - \mathcal{T}_{\bar{A}}) g}{\int_{\partial\Omega} g^2} \right|,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varepsilon : g \in L_0^2(\partial\Omega) &\longrightarrow u_\varepsilon(g)|_{\partial\Omega} & \text{avec } u_\varepsilon(g) \text{ sol. de (1),} \\ \mathcal{T}_{\bar{A}} : g \in L_0^2(\partial\Omega) &\longrightarrow u(\bar{A}, g)|_{\partial\Omega} & \text{avec } u(\bar{A}, g) \text{ sol. de (2).} \end{aligned}$$

Ainsi, on cherche les modes propres de $\mathcal{T}_\varepsilon - \mathcal{T}_{\bar{A}}$ associés aux plus grandes valeurs propres en valeur absolue.

Cas de coefficients sphériques, périodiques : on a

$$\mathcal{T}_\varepsilon - \mathcal{T}_{\bar{A}} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} (A_* - \bar{A}) \mathcal{T}$$

avec $\mathcal{T} : g \in L_0^2(\partial\Omega) \longrightarrow w(g)|_{\partial\Omega}$ où $w(g)$ est la solution de

$$-\Delta w = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \nabla w \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

Choix des chargements

On identifie P chargements $(g_i)_{1 \leq i \leq P}$ tels que

$$\sup_{g \in L_0^2(\partial\Omega)} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)| \approx \sup_{\substack{g \in \text{Span } (g_i) \\ 1 \leq i \leq P}} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)|.$$

Quotient de Rayleigh : on optimise

$$\sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}=1} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathcal{E}(\bar{A}, g)| = \sup_{g \in L_0^2(\partial\Omega)} \left| \frac{\int_{\partial\Omega} g (\mathcal{T}_\varepsilon - \mathcal{T}_{\bar{A}}) g}{\int_{\partial\Omega} g^2} \right|,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varepsilon : g \in L_0^2(\partial\Omega) &\longrightarrow u_\varepsilon(g)|_{\partial\Omega} & \text{avec } u_\varepsilon(g) \text{ sol. de (1),} \\ \mathcal{T}_{\bar{A}} : g \in L_0^2(\partial\Omega) &\longrightarrow u(\bar{A}, g)|_{\partial\Omega} & \text{avec } u(\bar{A}, g) \text{ sol. de (2).} \end{aligned}$$

Ainsi, on cherche les modes propres de $\mathcal{T}_\varepsilon - \mathcal{T}_{\bar{A}}$ associés aux plus grandes valeurs propres en valeur absolue.

Cas de coefficients sphériques, périodiques : on a

$$\mathcal{T}_\varepsilon - \mathcal{T}_{\bar{A}} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} (A_* - \bar{A}) \mathcal{T}$$

avec $\mathcal{T} : g \in L_0^2(\partial\Omega) \longrightarrow w(g)|_{\partial\Omega}$ où $w(g)$ est la solution de

$$-\Delta w = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \nabla w \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

Valeur de P : On utilise les $P \gtrapprox P_d = \frac{d(d+1)}{2}$ premiers modes propres de \mathcal{T} .

Résultats numériques (cas périodique)

En dimension $d = 2$ ($\Omega =]0, 1[^2$), on considère le coefficient

$$A_\varepsilon(x, y) = A^{\text{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = \begin{pmatrix} 22 + 10 \times (\sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon}) + \sin(2\pi \frac{y}{\varepsilon})) & 0 \\ 0 & 12 + 2 \times (\sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon}) + \sin(2\pi \frac{y}{\varepsilon})) \end{pmatrix}.$$

Le coefficient homogénéisé associé est

$$A_* \approx \begin{pmatrix} 19.3378 & 0 \\ 0 & 11.8312 \end{pmatrix}.$$

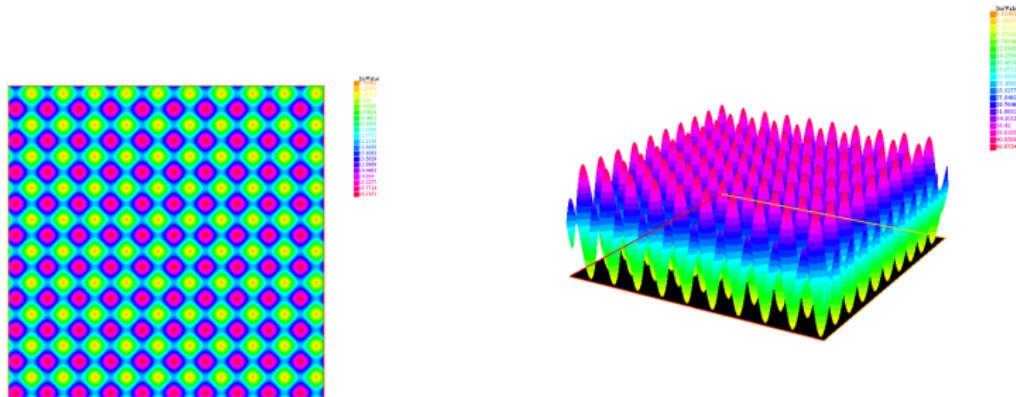


Figure: Composantes 11 et 22 du coefficient A_ε .

Résultats numériques (cas périodique)

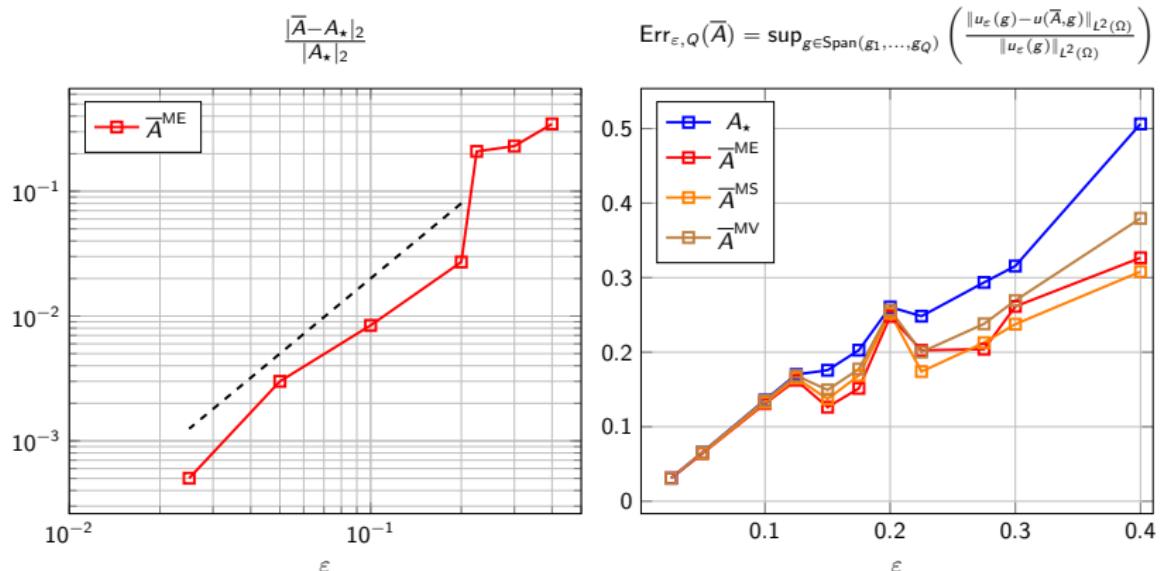


Figure: (gauche) Erreur entre les coefficients A_* et $\bar{A}_{\varepsilon,P}^{\text{ME}}$.

(droite) Critère $\text{Err}_{\varepsilon, Q}(\bar{A})$ pour $\bar{A} \in \{A_*, \bar{A}_{\varepsilon,P}^{\text{MV}}, \bar{A}_{\varepsilon,P}^{\text{ME}}, \bar{A}_{\varepsilon,P}^{\text{MS}}\}$ (avec $Q = 11$).

Résultats numériques (cas stochastique)

On utilise ici un coefficient stochastique (damier aléatoire),

$$A_\varepsilon(x, y, \omega) = a^{\text{sto}}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \omega\right) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} X_k(\omega) \mathbb{1}_{k+Q}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)\right) \text{Id},$$

avec X_k des variables aléatoires i.i.d telles que $\mathbb{P}(X_k = \gamma_1) = \mathbb{P}(X_k = \gamma_2) = \frac{1}{2}$ et $(\gamma_1, \gamma_2) = (4, 16)$.

Le coefficient homogénéisé associé est

$$A_* = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \text{ Id.}$$

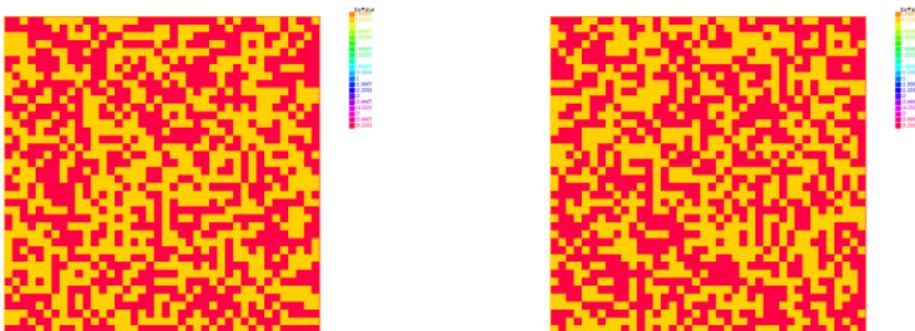


Figure: Deux réalisations du coefficient A_ε .

On réécrit notre stratégie $I_\varepsilon = \inf \sup |\mathbb{E}(\mathcal{E}(A_\varepsilon(\cdot, \omega), f)) - \mathcal{E}(\bar{A}, f)|$. Les intervalles de confiance sont calculés en utilisant 40 approximations de l'espérance (elle-même estimée par sa moyenne empirique sur 40 réalisations du coefficient a^{sto}).

Résultats numériques (cas stochastique)

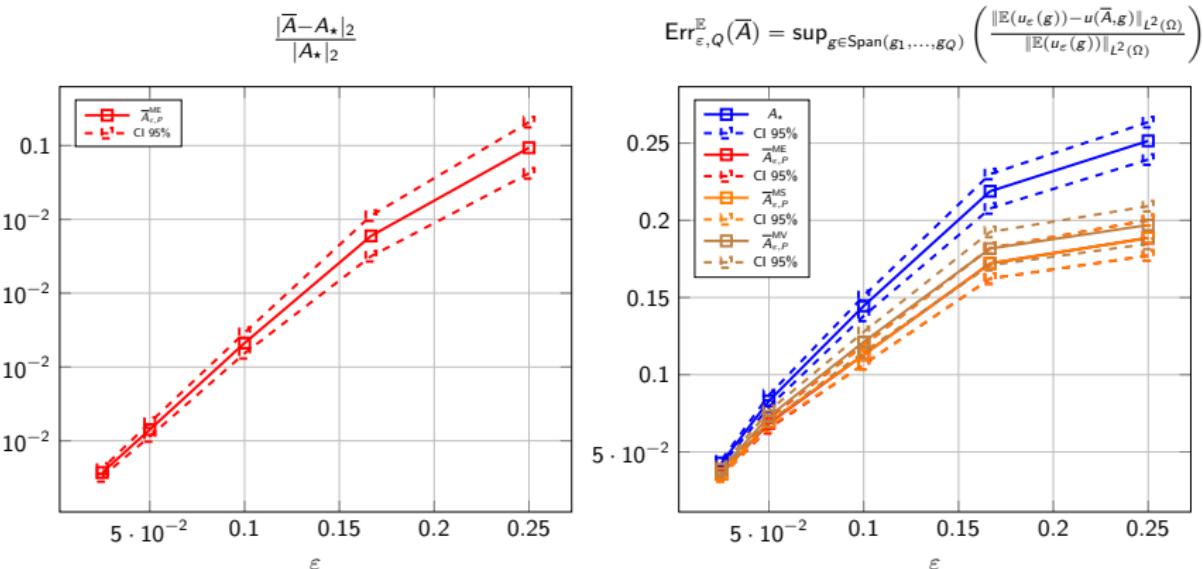


Figure: (gauche) Erreur entre les coefficients A_\star et $\bar{A}_{\varepsilon,P}^{\text{ME}}$.
 (droite) Critère $\text{Err}_{\varepsilon,Q}^{\mathbb{E}}(\bar{A})$ pour $\bar{A} \in \{A_\star, \bar{A}_{\varepsilon,P}^{\text{ME}}, \bar{A}_{\varepsilon,P}^{\text{MS}}, \bar{A}_{\varepsilon,P}^{\text{MV}}\}$ (avec $Q = 11$).

Bruit

Motivation : La valeur de l'énergie peut ne pas être connue de façon exacte.

Formulation : On considère un bruit multiplicatif :

$$\mathcal{E}(A_\varepsilon, g; \sigma) = (1 + \sigma\eta) \mathcal{E}(A_\varepsilon, g).$$

où A_ε est un coefficient déterministe, et η a une distribution gaussienne.

Bruit

Motivation : La valeur de l'énergie peut ne pas être connue de façon exacte.

Formulation : On considère un bruit multiplicatif :

$$\mathcal{E}(A_\varepsilon, g; \sigma) = (1 + \sigma \eta) \mathcal{E}(A_\varepsilon, g).$$

où A_ε est un coefficient déterministe, et η a une distribution gaussienne.

Résultats :

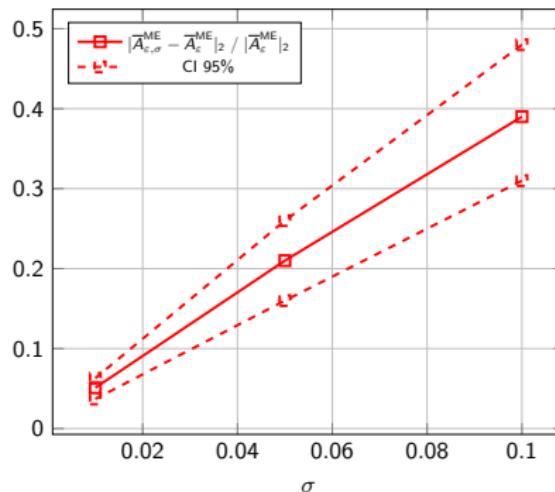


Figure: Erreur $\frac{|A_{\varepsilon,\sigma}^{ME} - A_\varepsilon^{ME}|_2}{|A_\varepsilon^{ME}|_2}$ en fonction de σ (pour $\varepsilon = 0.025$ et $P = 3$).

Partie II

Recalage de coefficient effectif par approche perturbative

Recalage de coefficient effectif

- **Hypothèse :** Le coefficient effectif est au voisinage d'un coefficient \bar{A}_0 connu.

Recalage de coefficient effectif

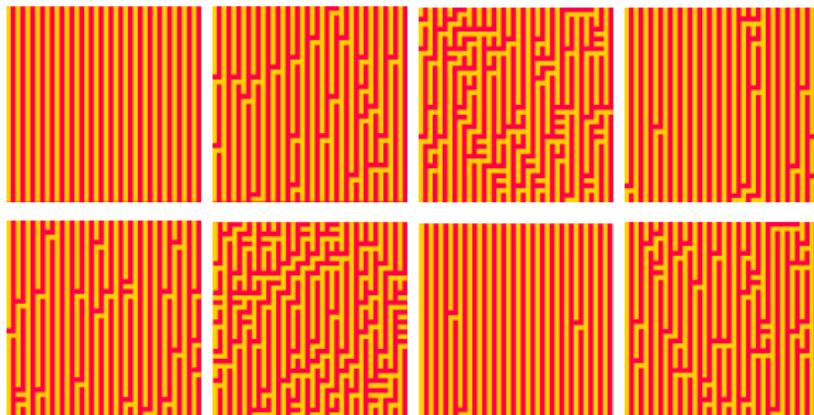
- **Hypothèse** : Le coefficient effectif est au voisinage d'un coefficient \bar{A}_0 connu.
- **Exemple** : Matériau périodique présentant des défauts aléatoires

$$A_{\varepsilon,\eta}(x, \omega) = A_\varepsilon^{\text{per}}(x) + b_\eta(\omega) C_\varepsilon^{\text{per}}(x),$$

avec $C_\varepsilon^{\text{per}}$ possiblement non négligeable, mais

$$A_{*,\eta} = \bar{A}_0 + \eta \bar{A}_1 + o(\eta),$$

où \bar{A}_0 est connu (par ex. donné comme référence industrielle).



Recalage de coefficient effectif

- **Hypothèse** : Le coefficient effectif est au voisinage d'un coefficient \bar{A}_0 connu.
- **Problème** : Calculer **de façon répétée**, à l'aide de l'approche précédente, les coefficients effectifs pour différentes réalisations ω et différents taux de défaut η conduit à des **coûts de calculs prohibitif** ...

Question

Peut-on utiliser la connaissance a priori de \bar{A}_0 pour guider et accélérer l'optimisation ?

Développement perturbatif

On considère le problème

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et son approximation par

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = f \text{ dans } \Omega, \quad \bar{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Développement perturbatif

On considère le problème

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et son approximation par

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = f \text{ dans } \Omega, \quad \bar{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exact	Développement perturbatif
\bar{A}	$\bar{A}_0 + \eta \bar{B}$

Développement perturbatif

On considère le problème

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et son approximation par

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = f \text{ dans } \Omega, \quad \bar{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exact	Développement perturbatif
\bar{A}	$\bar{A}_0 + \eta \bar{B}$
$u(\bar{A}, f)$	$u_0 + \eta v$

où $u_0 = u(\bar{A}_0, f)$ et $v = v(\bar{A}_0, \bar{B}, f)$ est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\bar{A}_0 \nabla v) = \operatorname{div}(\bar{B} \nabla u_0) & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Développement perturbatif

On considère le problème

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et son approximation par

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = f \text{ dans } \Omega, \quad \bar{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exact	Développement perturbatif
\bar{A}	$\bar{A}_0 + \eta \bar{B}$
$u(\bar{A}, f)$	$u_0 + \eta v$

où $u_0 = u(\bar{A}_0, f)$ et $v = v(\bar{A}_0, \bar{B}, f)$ est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\bar{A}_0 \nabla v) = \operatorname{div}(\bar{B} \nabla u_0) & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La linéarité (en \bar{B}) implique que $v = \sum_{ij} \bar{B}_{ij} v_{ij}$ avec $v_{ij} = v_{ij}(\bar{A}_0, f)$ la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\bar{A}_0 \nabla v_{ij}) = \operatorname{div}(E_{ij} \nabla u_0) & \text{dans } \Omega, \\ v_{ij} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Développement perturbatif

On considère le problème

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et son approximation par

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = f \text{ dans } \Omega, \quad \bar{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exact	Développement perturbatif
\bar{A}	$\bar{A}_0 + \eta \bar{B}$
$u(\bar{A}, f)$	$u_0 + \eta v$
$\mathcal{E}(\bar{A}, f)$	$\mathcal{E}(\bar{A}_0, f) + \eta \sum_{ij} \bar{B}_{ij} \mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, f)$

où $\mathcal{E}(\bar{A}_0, f) = -\frac{1}{2} \int_\Omega f u_0$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, f) &= -\frac{1}{2} \int_\Omega f v_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \partial_i u_0 \partial_j u_0.\end{aligned}$$

Développement perturbatif

On considère le problème

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et son approximation par

$$-\operatorname{div}(\bar{A} \nabla \bar{u}) = f \text{ dans } \Omega, \quad \bar{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exact	Développement perturbatif
\bar{A}	$\bar{A}_0 + \eta \bar{B}$
$u(\bar{A}, f)$	$u_0 + \eta v$
$\mathcal{E}(\bar{A}, f)$	$\mathcal{E}(\bar{A}_0, f) + \eta \sum_{ij} \bar{B}_{ij} \mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, f)$

On formule le problème d'optimisation

$$\inf_{\substack{\bar{B} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}, \\ \|\bar{B}\|_{L^2(\Omega)} = 1.}} \left(\mathcal{E}(A_{\varepsilon, \eta}, f) - \mathcal{E}(\bar{A}_0, f) - \sum_{1 \leq i, j \leq d} [\bar{B}]_{ij} \mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, f) \right)^2.$$
$$\alpha \leq \bar{A}_0 + \bar{B} \leq \beta$$

Du point de vue de l'implémentation

- **Étape offline :**

- Calculer $u(\bar{A}_0, f)$.
- Calculer $\mathcal{E}(\bar{A}_0, f)$ et $\mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, f)$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq d$.

↳ calculer $P \approx \frac{d(d+1)}{2}$ solutions d'EDPs grossières et $P(1 + \frac{d(d+1)}{2})$ intégrales.

Du point de vue de l'implémentation

- **Étape offline :**

- Calculer $u(\bar{A}_0, f)$.
- Calculer $\mathcal{E}(\bar{A}_0, f)$ et $\mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, f)$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq d$.

↳ calculer $P \approx \frac{d(d+1)}{2}$ solutions d'EDPs grossières et $P(1 + \frac{d(d+1)}{2})$ intégrales.

- **Étape online :** on applique une **descente de gradient**

- Définir

$$\bar{B}^{n+1} = \bar{B}^n - \mu \nabla_{\bar{B}} J_{\varepsilon}^n(\bar{B}^n)$$

avec

$$J_{\varepsilon}^n(\bar{B}) = \left(\mathcal{E}(A_{\varepsilon}, \textcolor{blue}{f^n}) - \mathcal{E}(\bar{A}_0, \textcolor{blue}{f^n}) - \sum_{ij} [\bar{B}]_{ij} \mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, \textcolor{blue}{f^n}) \right)^2$$

- et f^n , l'argsup de

$$\sup_{f \text{ s.t. } \|f\|_{L^2(\Omega)} = 1} \left(\mathcal{E}(A_{\varepsilon}, f) - \mathcal{E}(\bar{A}_0, f) - \sum_{ij} [\bar{B}^n]_{ij} \mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, f) \right)^2.$$

Du point de vue de l'implémentation

- **Étape offline :**

- Calculer $u(\bar{A}_0, f)$.
- Calculer $\mathcal{E}(\bar{A}_0, f)$ et $\mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, f)$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq d$.

↳ calculer $P \approx \frac{d(d+1)}{2}$ solutions d'EDPs grossières et $P(1 + \frac{d(d+1)}{2})$ intégrales.

- **Étape online :** on applique une **descente de gradient**

- Définir

$$\bar{B}^{n+1} = \bar{B}^n - \mu \nabla_{\bar{B}} J_{\varepsilon}^n(\bar{B}^n)$$

avec

$$J_{\varepsilon}^n(\bar{B}) = \left(\mathcal{E}(A_{\varepsilon}, \textcolor{blue}{f^n}) - \mathcal{E}(\bar{A}_0, \textcolor{blue}{f^n}) - \sum_{ij} [\bar{B}]_{ij} \mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, \textcolor{blue}{f^n}) \right)^2$$

- et f^n , l'argsup de

$$\sup_{f \text{ s.t. } \|f\|_{L^2(\Omega)} = 1} \left(\mathcal{E}(A_{\varepsilon}, f) - \mathcal{E}(\bar{A}_0, f) - \sum_{ij} [\bar{B}^n]_{ij} \mathcal{F}_{ij}(\bar{A}_0, f) \right)^2.$$

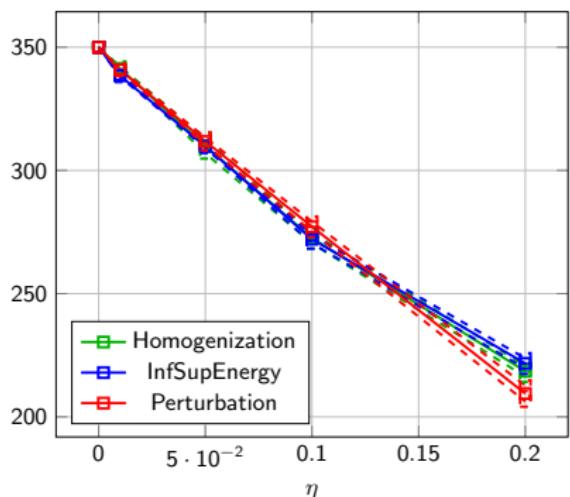
En pratique, $\sup_{f \in L^2(\Omega)} \rightarrow \sup_{f \in V_P}$ sur $V_P = \text{Span}\{P \text{ chargements}\}$, avec $P \approx \frac{d(d+1)}{2}$.
Cette étape nécessite le calcul d'un problème aux valeurs propres de taille $P \times P$.

↳ pas de résolutions d'EDPs !

Résultats numériques

- Préserve la qualité de l'approximation.
- Réduction des coûts de calcul (par un facteur de ≈ 80 à 400).

\bar{A}^{22}



$$\text{Err}_{\varepsilon, \eta}^Q(\bar{A}) = \frac{\sup_{g \in \text{Span}(g_1, \dots, g_P)} \|\mathbb{E}(u_\varepsilon, \eta(g)) - u(\bar{A}, g)\|_{L^2(\mathcal{D})}}{\|\mathbb{E}(u_\varepsilon, \eta(\hat{g}))\|_{L^2(\mathcal{D})}}$$

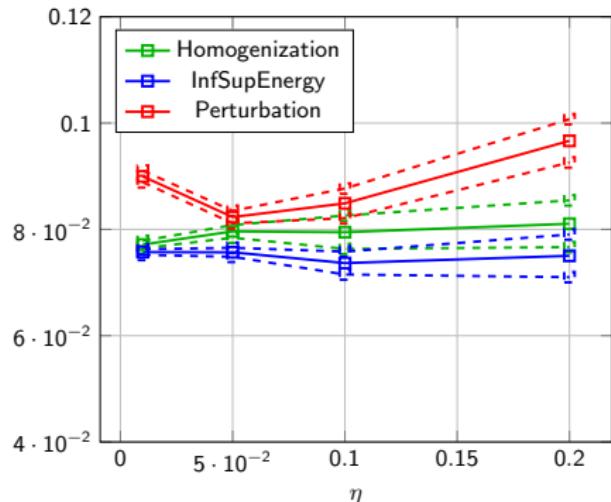


Figure: (gauche) Composante 22 de différentes approximations du coefficient effectif.
(droite) Critère $\text{Err}_{\varepsilon, Q}^{\mathbb{E}}(\bar{A})$ pour différents coefficients constants (avec $Q = 9$ et $\varepsilon = 0.025$).

Partie III

Sélection efficace de coefficients effectifs

Cadre de travail

- **Contexte** : on dispose d'

- une liste de coefficients candidats $\mathcal{A} = \{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_N\}$.
- une liste de chargements admissibles $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_P\}$.
- un opérateur de mesure $\mathcal{O} : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $L^2(\Omega)$ (par ex. $\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) = u_\varepsilon(f)$ ou $\mathcal{E}(A_\varepsilon, f)$).

Cadre de travail

- **Contexte** : on dispose d'

- une liste de coefficients candidats $\mathcal{A} = \{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_N\}$.
- une liste de chargements admissibles $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_P\}$.
- un opérateur de mesure $\mathcal{O} : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $L^2(\Omega)$ (par ex. $\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) = u_\varepsilon(f)$ ou $\mathcal{E}(A_\varepsilon, f)$).

- **Challenge** :

- Budget Q restreint de mesures : $Q \ll P$.
- Décomposition (inconnue) de \mathcal{F} comme l'union de $\mathcal{F}_{\text{disc}}$ et de $\mathcal{F}_{\text{non-disc}}$ avec

$$\text{card}(\mathcal{F}_{\text{disc}}) \ll \text{card}(\mathcal{F}),$$

et pour tout $f \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$ et tout $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{A}^2$,

$$\|\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) - \mathcal{O}(\bar{A}, f)\|_{\mathcal{O}} \approx \|\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) - \mathcal{O}(\bar{B}, f)\|_{\mathcal{O}}.$$

Cadre de travail

- **Contexte** : on dispose d'

- une liste de coefficients candidats $\mathcal{A} = \{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_N\}$.
- une liste de chargements admissibles $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_P\}$.
- un opérateur de mesure $\mathcal{O} : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $L^2(\Omega)$ (par ex. $\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) = u_\varepsilon(f)$ ou $\mathcal{E}(A_\varepsilon, f)$).

- **Challenge** :

- Budget Q restreint de mesures : $Q \ll P$.
- Décomposition (inconnue) de \mathcal{F} comme l'union de $\mathcal{F}_{\text{disc}}$ et de $\mathcal{F}_{\text{non-disc}}$ avec

$$\text{card}(\mathcal{F}_{\text{disc}}) \ll \text{card}(\mathcal{F}),$$

et pour tout $f \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$ et tout $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{A}^2$,

$$\|\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) - \mathcal{O}(\bar{A}, f)\|_{\mathcal{O}} \approx \|\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) - \mathcal{O}(\bar{B}, f)\|_{\mathcal{O}}.$$

Objectif

Sélectionner dans \mathcal{A} le meilleur coefficient effectif en minimisant simultanément le nombre d'opérations de mesures $\mathcal{O}(A_\varepsilon, f)$ avec $f \in \mathcal{F}$.

Travaux inspirés de discussions avec H. Ammari (ETH Zürich).

Algorithme de sélection

Algorithme itératif : chaque étape k sélectionne un chargement f^k dans \mathcal{F} et actualise le choix du meilleur coefficient \bar{A}^k dans \mathcal{A} .

Algorithme de sélection

Algorithme itératif : chaque étape k sélectionne un chargement f^k dans \mathcal{F} et actualise le choix du meilleur coefficient \bar{A}^k dans \mathcal{A} .

Algorithme de sélection

Itérée k :

- ① Calculer le taux de discrimination $\Delta^k(f)$ pour tout f dans $\mathcal{F}^k = \mathcal{F} \setminus \{f^p\}_{p=1,\dots,k-1}$.

- ② Sélectionner

$$f^k \in \arg \max_{f \in \mathcal{F}^k} \Delta^k(f).$$

- ③ Mesurer $\mathcal{O}(A_\varepsilon, f^k)$.

- ④ Actualiser le choix du meilleur coefficient effectif

$$\bar{A}^k \in \arg \min_{\bar{A} \in \mathcal{A}} \gamma^k(\bar{A}).$$

Quantités à définir :

- Taux de discrimination : Δ^k définit la capacité d'un chargement à discriminer les éléments de \mathcal{A} par rapport à l'observable \mathcal{O} .
- Score d'efficacité : γ^k définit la qualité d'un coefficient en tant que coefficient effectif.

Conclusion et perspectives

Nos stratégies

- consistent à définir des **approximations effectives** pour des EDPs multiéchelles à l'aide de coefficients effectifs,
- sont adaptées à des contextes où **l'information disponible est limitée**,
- sont **inspirées par la théorie de l'homogénéisation** et sont **consistantes avec elle** (numériquement et théoriquement),
- peuvent être **étendue au delà du régime classique de l'homogénéisation** (cadre périodique, échelles séparées, ...).

Conclusion et perspectives

Nos stratégies

- consistent à définir des **approximations effectives** pour des EDPs multiéchelles à l'aide de coefficients effectifs,
- sont adaptées à des contextes où **l'information disponible est limitée**,
- sont **inspirées par la théorie de l'homogénéisation** et sont **consistantes avec elle** (numériquement et théoriquement),
- peuvent être **étendue au delà du régime classique de l'homogénéisation** (cadre périodique, échelles séparées, ...).

Perspectives

- Interfaçage avec des **données expérimentales**.
- Extension au cas de coefficients effectifs **non constants**.
- **Analyse de convergence** de \bar{A} vers A_* .

Conclusion et perspectives

Nos stratégies

- consistent à définir des **approximations effectives** pour des EDPs multiéchelles à l'aide de coefficients effectifs,
- sont adaptées à des contextes où **l'information disponible est limitée**,
- sont **inspirées par la théorie de l'homogénéisation** et sont **consistantes avec elle** (numériquement et théoriquement),
- peuvent être **étendue au delà du régime classique de l'homogénéisation** (cadre périodique, échelles séparées, ...).

Perspectives

- Interfaçage avec des **données expérimentales**.
- Extension au cas de coefficients effectifs **non constants**.
- **Analyse de convergence** de \bar{A} vers A_* .

Merci pour votre attention !

Une approche alternative du bruit

Motivation : on anticipe sur la présence d'erreurs de reproduction du modèle effectif durant la phase de déploiement.

Idée : traiter \bar{A} comme une variable aléatoire et optimiser sur sa moyenne.

Formulation : on considère le problème

$$\inf_{\bar{A} \in S_{\alpha}, \beta} \sup_{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1} \left| \mathcal{E}(A_\varepsilon, g) - \mathbb{E} (\mathcal{E}(\bar{A} + \sigma\eta, g)) \right|^2,$$

où η est une variable gaussienne.

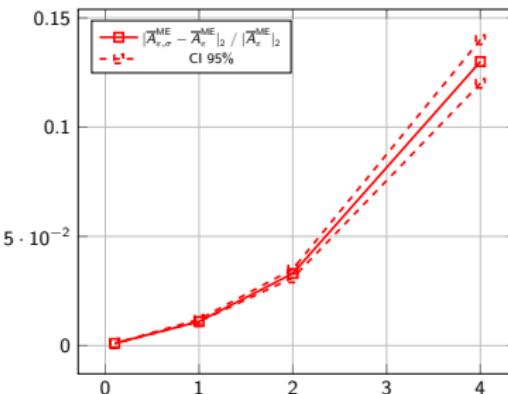


Figure: Erreur entre $\bar{A}_{\varepsilon,\sigma}^{ME}$ et \bar{A}_ε^{ME} en fonction de σ (pour $\varepsilon = 0.05$).

Analyse de convergence

On considère le problème suivant

$$\inf_{\overline{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}, \textcolor{blue}{1 \leq i \leq j \leq d}} |\mathcal{E}(A_\varepsilon, \textcolor{blue}{g_{i,j}}) - \mathcal{E}(\overline{A}, \textcolor{blue}{g_{i,j}})|,$$
$$\alpha \leq \overline{A} \leq \beta$$

où $(g_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq d}$ sont des chargements présélectionnés.

Pour un choix particuliers de chargements $(g_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq d}$, on a

$$|\overline{A}_\varepsilon^{\text{opt}} - A_\star| \leq C\delta(\varepsilon),$$

où $\delta(\varepsilon)$ est une fonction telle que

$$|\mathcal{E}(A_\varepsilon) - \mathcal{E}(A_\star)| \leq C\delta(\varepsilon).$$

Choix des chargements

On définit

$$g_{i,j} = \left(\frac{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j}{2} \right) \cdot \mathbf{n},$$

où $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq d}$ est la base canonique de \mathbb{R}^d .

Soit $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$, la solution de

$$-\operatorname{div}(\bar{\mathbf{A}} \nabla \bar{u}) = 0 \text{ in } \Omega, \quad (\bar{\mathbf{A}} \nabla \bar{u}) \cdot \mathbf{n} = g_{i,j} \text{ on } \partial\Omega.$$

s'écrit

$$\bar{u}_{i,j} = (\bar{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{e}_{i,j}) \cdot \mathbf{x}.$$

Ainsi, l'énergie s'écrit

$$\mathcal{E}(\bar{\mathbf{A}}, g_{i,j}) = \int_{\Omega} \underbrace{(\bar{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{e}_{i,j})^T}_{(\nabla u_{i,j})^T} \bar{\mathbf{A}} \underbrace{(\bar{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{e}_{i,j})}_{\nabla u_{i,j}} = |\Omega| \mathbf{e}_{i,j}^T \bar{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{e}_{i,j}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{A}} - A_*\| &\leq C \|\bar{\mathbf{A}}^{-1} - A_*^{-1}\| \\ &\leq C \sum_{1 \leq i \leq j \leq d} |\mathbf{e}_{ij}^T (\bar{\mathbf{A}}^{-1} - A_*^{-1}) \mathbf{e}_{ij}| \\ &\leq \dots \\ &\leq C \delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Résultats numériques

$$\text{Err}_{\varepsilon, Q}(\bar{A}) = \sup_{g \in \text{Span}(g_1, \dots, g_Q)} \left(\frac{\|u_\varepsilon(g) - u(\bar{A}, g)\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_\varepsilon(g)\|_{L^2(\Omega)}} \right)$$

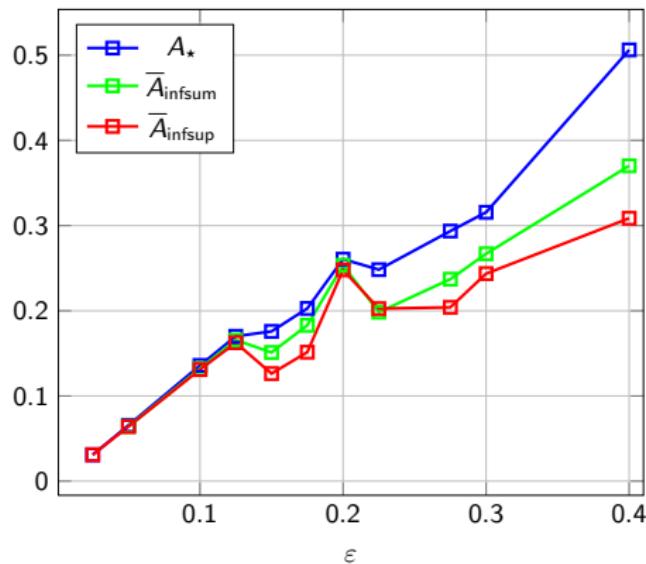


Figure: Erreur $\text{Err}_{\varepsilon, Q}(\bar{A})$ pour $\bar{A} \in \{A_*, \bar{A}_{\text{infsup}}, \bar{A}_{\text{infsup}}\}$ en fonction de ε (avec $Q = 11$).

Approximation effective pour une EDP de Schrödinger

Approximation effective pour une EDP de Schrödinger

Homogénéisation. On considère une EDP de Schrödinger

$$-\Delta u_\varepsilon + V_\varepsilon u_\varepsilon = f \text{ in } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

Dans le cas périodique (i.e. $V_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} V_{\text{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$), on définit

$$-\Delta u_* + V_* u_* = f \text{ in } \Omega, \quad u_* = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

avec $V_* \in \mathbb{R}$ définit à l'aide d'un correcteur w , solution périodique de

$$-\Delta w = V_{\text{per}} \text{ in } \mathbb{R}^d.$$

La théorie de l'homogénéisation induit que

$$u_\varepsilon - u_* \rightarrow 0 \text{ in } L^2(\Omega),$$

$$u_\varepsilon - \underbrace{\left(1 + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) u_*}_{u_{\varepsilon,1}} \rightarrow 0 \text{ in } H^1(\Omega).$$

Approximation effective dans $H^1(\Omega)$. À partir de mesures de solutions $(u_\varepsilon(f_p))_{1 \leq p \leq P}$ et de leurs gradients, on procède en deux étapes :

1. un meilleur potentiel \bar{V} est défini au travers d'un problème d'optimisation.
2. un correcteur est défini en s'inspirant de la solution corrigée $u_{\varepsilon,1}$.

Définir un meilleur potentiel \bar{V}

On considère le problème d'optimisation

$$\inf_{\bar{V} \in \mathbb{R}} \sup_{f \in L^2(\Omega)} \|(-\Delta)^{-1}(-\Delta + \bar{V})(u_\varepsilon(f) - u(\bar{V}, f))\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

avec $\bar{u} = u(\bar{V}, f)$ la solution de

$$-\Delta \bar{u} + \bar{V} \bar{u} = f \text{ in } \Omega, \quad \bar{u} = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

On peut montrer que

Proposition (Existence et unicité)

Dans le cas périodique, il existe un unique minimiseur $\bar{V}_\varepsilon^{\text{opt}}$ pour des valeurs suffisamment petites de ε .

Proposition (Consistance asymptotique)

Dans le cas périodique, on a la convergence

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{V}_\varepsilon^{\text{opt}} = V_*$$

Définir un correcteur

L'homogénéisation affirme que

$$\nabla u_\varepsilon \approx \nabla u_* + u_* (\nabla w) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \text{ in } L^2(\Omega).$$

On définit un correcteur via le problème d'optimisation

$$\inf_{\bar{C} \in (L^2(\Omega))^{d \times d}} \sup_{f \in L^2(\Omega)} \|\nabla u_\varepsilon(f) - \nabla \bar{u}(f) - \bar{C} \bar{u}(f)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où $\bar{u}(f) = u(\bar{V}_\varepsilon^{\text{opt}}, f)$.

$$\text{Err}_{\varepsilon, Q}(\bar{V}) = \sup_{f \in V_h^Q(\Omega)} \|u_\varepsilon(f) - u(\bar{V}, f)\|_{L^2(\Omega)} / \|u_\varepsilon(\hat{f})\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{Err}_{\varepsilon, Q}^{\text{corr}}(\bar{V}, \bar{C}) = \sup_{f \in V_h^Q(\Omega)} \|\nabla u_\varepsilon(f) - \nabla u(\bar{V}, f) - \bar{C} u(\bar{V}, f)\|_{L^2(\Omega)} / \|\nabla u_\varepsilon(\hat{f})\|_{L^2(\Omega)}$$

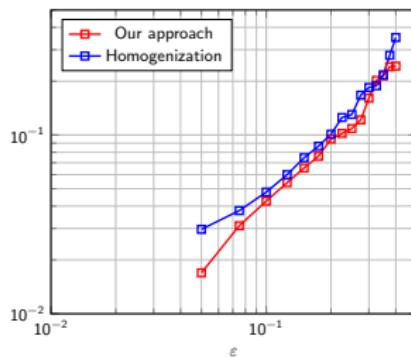
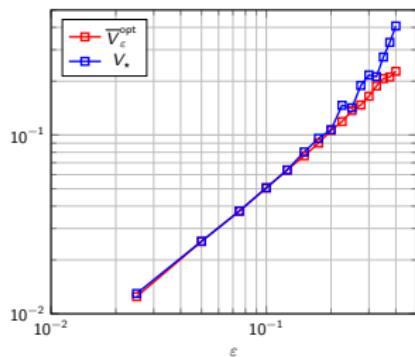


Figure: Comparaison de notre approche avec l'homogénéisation du point de vue L^2 (gauche) et H^1 (droite).

Sélection efficace de coefficients effectifs

Cadre de travail

- **Contexte** : on dispose d'

- une liste de coefficients candidats $\mathcal{A} = \{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_N\}$.
- une liste de chargements admissibles $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_P\}$.
- un opérateur de mesure $\mathcal{O} : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $L^2(\Omega)$ (par ex. $\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) = u_\varepsilon(f)$ ou $\mathcal{E}(A_\varepsilon, f)$).

Cadre de travail

- **Contexte** : on dispose d'

- une liste de coefficients candidats $\mathcal{A} = \{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_N\}$.
- une liste de chargements admissibles $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_P\}$.
- un opérateur de mesure $\mathcal{O} : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $L^2(\Omega)$ (par ex. $\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) = u_\varepsilon(f)$ ou $\mathcal{E}(A_\varepsilon, f)$).

- **Challenge** :

- Budget Q restreint de mesures : $Q \ll P$.
- Décomposition (inconnue) de \mathcal{F} comme l'union de $\mathcal{F}_{\text{disc}}$ et de $\mathcal{F}_{\text{non-disc}}$ avec

$$\text{card}(\mathcal{F}_{\text{disc}}) \ll \text{card}(\mathcal{F}),$$

et pour tout $f \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$ et tout $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{A}^2$,

$$\|\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) - \mathcal{O}(\bar{A}, f)\|_{\mathcal{O}} \approx \|\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) - \mathcal{O}(\bar{B}, f)\|_{\mathcal{O}}.$$

Cadre de travail

- **Contexte** : on dispose d'

- une liste de coefficients candidats $\mathcal{A} = \{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_N\}$.
- une liste de chargements admissibles $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_P\}$.
- un opérateur de mesure $\mathcal{O} : \mathcal{A} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $L^2(\Omega)$ (par ex. $\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) = u_\varepsilon(f)$ ou $\mathcal{E}(A_\varepsilon, f)$).

- **Challenge** :

- Budget Q restreint de mesures : $Q \ll P$.
- Décomposition (inconnue) de \mathcal{F} comme l'union de $\mathcal{F}_{\text{disc}}$ et de $\mathcal{F}_{\text{non-disc}}$ avec

$$\text{card}(\mathcal{F}_{\text{disc}}) \ll \text{card}(\mathcal{F}),$$

et pour tout $f \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$ et tout $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{A}^2$,

$$\|\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) - \mathcal{O}(\bar{A}, f)\|_{\mathcal{O}} \approx \|\mathcal{O}(A_\varepsilon, f) - \mathcal{O}(\bar{B}, f)\|_{\mathcal{O}}.$$

Objectif

Sélectionner dans \mathcal{A} le meilleur coefficient effectif en minimisant simultanément le nombre d'opérations de mesures $\mathcal{O}(A_\varepsilon, f)$ avec $f \in \mathcal{F}$.

Travaux inspirés de discussions avec H. Ammari (ETH Zürich).

Algorithme itératif : chaque étape k sélectionne un chargement f^k dans \mathcal{F} et actualise le choix du meilleur coefficient \bar{A}^k dans \mathcal{A} .

Quantités à définir :

- **Taux de discrimination** : Δ^k définit la capacité d'un chargement à discriminer les éléments de \mathcal{A} par rapport à l'observable \mathcal{O} .
- **Score d'efficacité** : γ^k définit la qualité d'un coefficient en tant que coefficient effectif.

Algorithme de sélection

Algorithme itératif : chaque étape k sélectionne un chargement f^k dans \mathcal{F} et actualise le choix du meilleur coefficient \overline{A}^k dans \mathcal{A} .

Quantités à définir :

- **Taux de discrimination** : Δ^k définit la capacité d'un chargement à discriminer les éléments de \mathcal{A} par rapport à l'observable \mathcal{O} .

$\Delta_1(f)$	$\max_{(\overline{A}, \overline{B}) \in \mathcal{A}^2} \text{Err}(\overline{A}, \overline{B}, f)$	$\text{Err}(\overline{A}, \overline{B}, f) = \frac{\ \mathcal{O}(\overline{A}, f) - \mathcal{O}(\overline{B}, f)\ _{\mathcal{O}}}{\ \mathcal{O}(\overline{A}, f)\ _{\mathcal{O}}}$
---------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Algorithme de sélection

Algorithme itératif : chaque étape k sélectionne un chargement f^k dans \mathcal{F} et actualise le choix du meilleur coefficient \bar{A}^k dans \mathcal{A} .

Quantités à définir :

- **Taux de discrimination** : Δ^k définit la capacité d'un chargement à discriminer les éléments de \mathcal{A} par rapport à l'observable \mathcal{O} .

$\Delta_1(f)$	$\max_{(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathcal{A}^2} \text{Err}(\bar{A}, \bar{B}, f)$	$\text{Err}(\bar{A}, \bar{B}, f) = \frac{\ \mathcal{O}(\bar{A}, f) - \mathcal{O}(\bar{B}, f)\ _{\mathcal{O}}}{\ \mathcal{O}(\bar{A}, f)\ _{\mathcal{O}}}$
$\Delta_2^k(f)$	$\max_{(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathcal{A}^2} \text{Err}^k(\bar{A}, f) - \text{Err}^k(\bar{B}, f) $	$\text{Err}^k(\bar{A}, f) = \frac{\ \mathcal{O}(\bar{A}^k, f) - \mathcal{O}(\bar{A}, f)\ _{\mathcal{O}}}{\ \mathcal{O}(\bar{A}^k, f)\ _{\mathcal{O}}}$

Algorithme de sélection

Algorithme itératif : chaque étape k sélectionne un chargement f^k dans \mathcal{F} et actualise le choix du meilleur coefficient \bar{A}^k dans \mathcal{A} .

Quantités à définir :

- **Taux de discrimination** : Δ^k définit la capacité d'un chargement à discriminer les éléments de \mathcal{A} par rapport à l'observable \mathcal{O} .

$\Delta_1(f)$	$\max_{(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathcal{A}^2} \text{Err}(\bar{A}, \bar{B}, f)$	$\text{Err}(\bar{A}, \bar{B}, f) = \frac{\ \mathcal{O}(\bar{A}, f) - \mathcal{O}(\bar{B}, f)\ _{\mathcal{O}}}{\ \mathcal{O}(\bar{A}, f)\ _{\mathcal{O}}}$
$\Delta_2^k(f)$	$\max_{(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathcal{A}^2} \text{Err}^k(\bar{A}, f) - \text{Err}^k(\bar{B}, f) $	$\text{Err}^k(\bar{A}, f) = \frac{\ \mathcal{O}(\bar{A}^k, f) - \mathcal{O}(\bar{A}, f)\ _{\mathcal{O}}}{\ \mathcal{O}(\bar{A}^k, f)\ _{\mathcal{O}}}$
$\Delta_{\varepsilon}(f)$	$\max_{(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathcal{A}^2} \text{Err}_{\varepsilon}(\bar{A}, f) - \text{Err}_{\varepsilon}(\bar{B}, f) $	$\text{Err}_{\varepsilon}(\bar{A}, f) = \frac{\ \mathcal{O}(\bar{A}_{\varepsilon}, f) - \mathcal{O}(\bar{A}, f)\ _{\mathcal{O}}}{\ \mathcal{O}(\bar{A}_{\varepsilon}, f)\ _{\mathcal{O}}}$

Algorithme de sélection

Algorithme itératif : chaque étape k sélectionne un chargement f^k dans \mathcal{F} et actualise le choix du meilleur coefficient \bar{A}^k dans \mathcal{A} .

Quantités à définir :

- **Taux de discrimination** : Δ^k définit la capacité d'un chargement à discriminer les éléments de \mathcal{A} par rapport à l'observable \mathcal{O} .

$\Delta_1(f)$	$\max_{(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathcal{A}^2} \text{Err}(\bar{A}, \bar{B}, f)$	$\text{Err}(\bar{A}, \bar{B}, f) = \frac{\ \mathcal{O}(\bar{A}, f) - \mathcal{O}(\bar{B}, f)\ _{\mathcal{O}}}{\ \mathcal{O}(\bar{A}, f)\ _{\mathcal{O}}}$
$\Delta_2^k(f)$	$\max_{(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathcal{A}^2} \text{Err}^k(\bar{A}, f) - \text{Err}^k(\bar{B}, f) $	$\text{Err}^k(\bar{A}, f) = \frac{\ \mathcal{O}(\bar{A}^k, f) - \mathcal{O}(\bar{A}, f)\ _{\mathcal{O}}}{\ \mathcal{O}(\bar{A}^k, f)\ _{\mathcal{O}}}$
$\Delta_\varepsilon(f)$	$\max_{(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathcal{A}^2} \text{Err}_\varepsilon(\bar{A}, f) - \text{Err}_\varepsilon(\bar{B}, f) $	$\text{Err}_\varepsilon(\bar{A}, f) = \frac{\ \mathcal{O}(A_\varepsilon, f) - \mathcal{O}(\bar{A}, f)\ _{\mathcal{O}}}{\ \mathcal{O}(A_\varepsilon, f)\ _{\mathcal{O}}}$

- **Score d'efficacité** : γ^k définit la qualité d'un coefficient en tant que coefficient effectif.

↳ ex.

$$\gamma^k(\bar{A}) = \max_{f \in \{f_1, \dots, f_k\}} \text{Err}_\varepsilon(\bar{A}, f).$$

ou

$$\gamma^k(\bar{A}) = \max_{f \in \{f_1, \dots, f_k\} \cap \mathcal{F}_{\text{disc}}} \text{Err}_\varepsilon(\bar{A}, f).$$

Algorithme de sélection

Algorithme de sélection

Initialisation:

Sélectionner $f^1 \in \mathcal{F}$ défini par

$$f^1 = \arg \max_{f \in \mathcal{F}} \max_{(\bar{A}, \bar{B}) \in \mathcal{A}^2} \frac{\|\mathcal{O}(\bar{A}, f) - \mathcal{O}(\bar{B}, f)\|_{\mathcal{O}}}{\|\mathcal{O}(\bar{A}, f)\|_{\mathcal{O}}}.$$

Itérée k :

- ① Calculer les taux de discrimination $\Delta^k(f)$ pour tout f dans $\mathcal{F}^k = \mathcal{F} \setminus \{f^p\}_{p=1,\dots,k-1}$.
- ② Sélectionner
$$f^k \in \arg \max_{f \in \mathcal{F}^k} \Delta^k(f).$$
- ③ Mesurer $\mathcal{O}(A_\varepsilon, f^k)$.
- ④ Actualiser le choix du meilleur coefficient effectif

$$\bar{A}^k \in \arg \min_{\bar{A} \in \mathcal{A}} \gamma^k(\bar{A}).$$

Résultats numériques

- **Microstructure.** Considérons

$$A_\varepsilon(x) = \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) & \text{if } x \in D_1, \\ \gamma_3 & \text{if } x \in D_2. \end{cases}$$

avec

$$\gamma_3 = a_*$$

la limite homogénéisée de $x \mapsto \gamma_1 + \gamma_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)$.

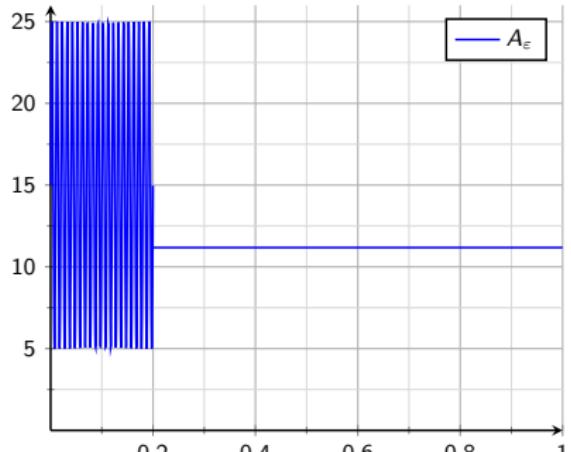


Figure: Coefficient A_ε avec $\varepsilon = 0.01$.

Résultats numériques

- Microstructure.
- Set \mathcal{F} . Considérons

$$f_n = \mathbb{1}_{\left(\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right)}$$

et

$$\mathcal{F} = \underbrace{\{f_n \text{ t.q. } \text{Supp}(f_n) \subset D_1\}}_{\mathcal{F}_{\text{disc}}} \cup \underbrace{\{f_n \text{ t.q. } \text{Supp}(f_n) \subset D_2\}}_{\mathcal{F}_{\text{non-disc}}}.$$

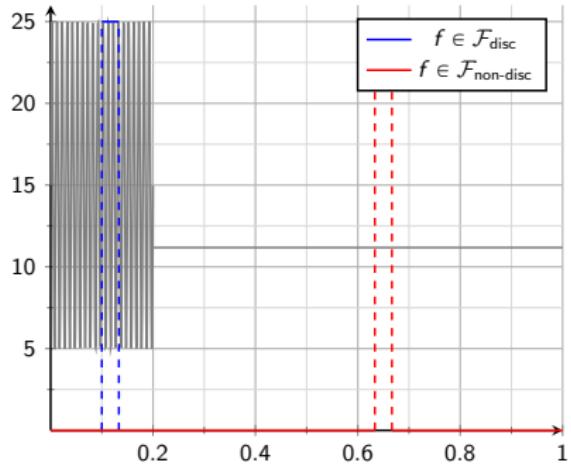


Figure: Chargements admissibles.

Résultats numériques

Microstructure.

Set \mathcal{F} .

Set \mathcal{A} . Considérons

$$\bar{A}(x) = \begin{cases} \bar{A}^1 & \text{if } x < 0.2, \\ \bar{A}^2 & \text{if } x > 0.2. \end{cases}$$

avec \bar{A}^1 et \bar{A}^2 des constantes.

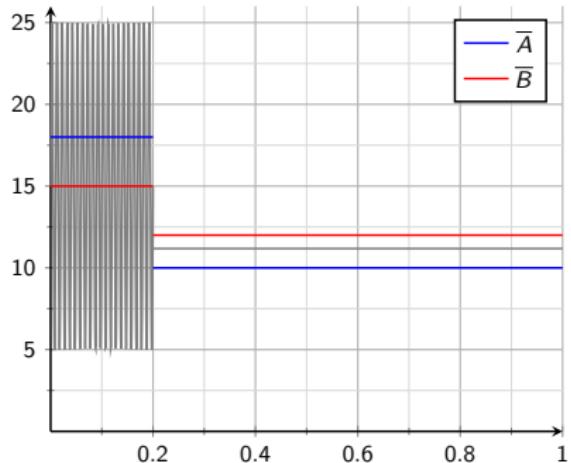


Figure: Coefficients effectifs.

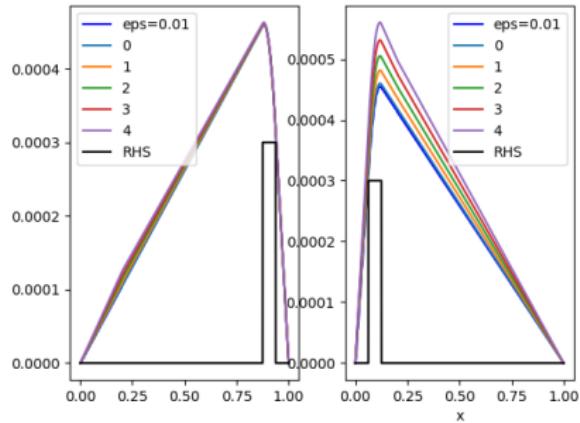
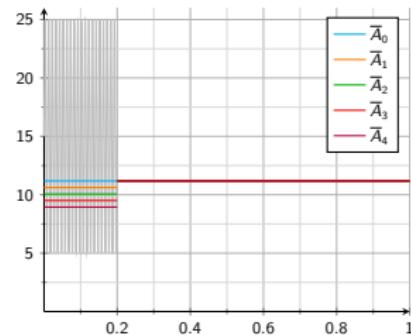
Résultats numériques : cas test 1

Cadre :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 = \{\bar{A}_0 &= (a_*, a_*), \\ \bar{A}_1 &= (0.95a_*, a_*), \\ \bar{A}_2 &= (0.9a_*, a_*), \\ \bar{A}_3 &= (0.85a_*, a_*), \\ \bar{A}_4 &= (0.8a_*, a_*)\},\end{aligned}$$

et

$$\frac{\text{card}(\mathcal{F}_{\text{disc}})}{\text{card}(\mathcal{F})} \approx 0.2.$$



Résultats numériques : cas test 1

Cadre :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{\bar{A}_0 = (a_*, a_*), \\ \bar{A}_1 &= (0.95a_*, a_*), \\ \bar{A}_2 &= (0.9a_*, a_*), \\ \bar{A}_3 &= (0.85a_*, a_*), \\ \bar{A}_4 &= (0.8a_*, a_*)\},\end{aligned}$$

et

$$\frac{\text{card}(\mathcal{F}_{\text{disc}})}{\text{card}(\mathcal{F})} \approx 0.2.$$

Conclusions :

- Δ_1 , Δ_2 et Δ_ε conduisent à des sélections similaires.
- Les chargements dans $\mathcal{F}_{\text{disc}}$ sont identifiés en premiers.
- $\bar{A}_0 = (a_*, a_*)$ est le meilleur coefficient à chaque étape.

Étape	Chargement	Coefficient
1	$f_1 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	\bar{A}_0
2	$f_2 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	\bar{A}_0
3	$f_3 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	\bar{A}_0
4	$f_4 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	\bar{A}_0
5	$f_{12} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0
6	$f_{13} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0
7	$f_{14} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0
8	$f_{15} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0
9	$f_{16} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0
10	$f_{17} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0
11	$f_{18} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0
12	$f_{19} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0
13	$f_{20} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0
14	$f_{21} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0
15	$f_{22} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	\bar{A}_0

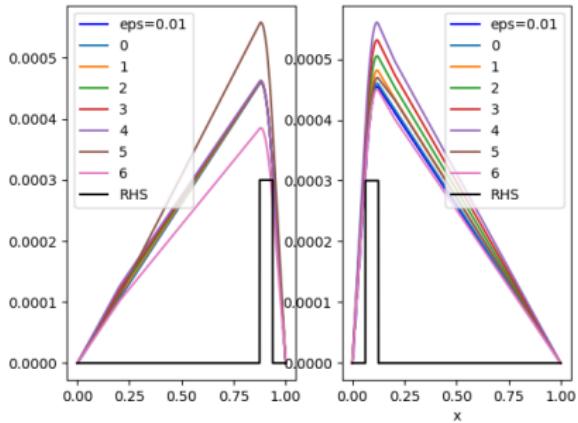
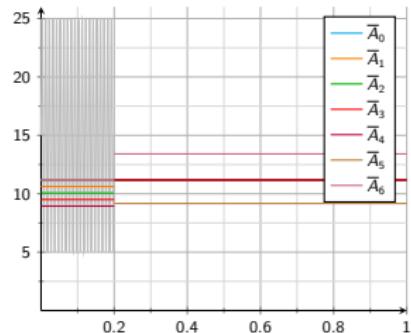
Résultats numériques : cas test 2

Cadre :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= \mathcal{A}_1 \cup \{\bar{A}_5 = (a_*, \quad 0.82a_*), \\ &\quad \bar{A}_6 = (a_*, \quad 1.2a_*)\},\end{aligned}$$

et

$$\frac{\text{card}(\mathcal{F}_{\text{disc}})}{\text{card}(\mathcal{F})} \approx 0.2.$$



Résultats numériques : cas test 2

Cadre :

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{\bar{A}_5 = (a_*, 0.82a_*), \\ \bar{A}_6 = (a_*, 1.2a_*)\},$$

et

$$\frac{\text{card}(\mathcal{F}_{\text{disc}})}{\text{card}(\mathcal{F})} \approx 0.2.$$

Conclusions :

- Δ_2 réplique plus fidèlement Δ_ε que Δ_1 .
- $\bar{A}_0 = (a_*, a_*)$ est le meilleur coefficient à chaque étape.
- Δ_1 sélectionne des chargements qui ne discriminent pas précisément \bar{A}_0 des autres coefficients de \mathcal{A}_1 .

Step	Δ_ε	Δ_2
1	$f_1 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	$f_{29} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
2	$f_2 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	$f_1 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$
3	$f_3 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	$f_2 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$
4	$f_4 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	$f_3 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$
5	$f_{29} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{28} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
6	$f_{28} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_4 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$
7	$f_{12} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{27} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
8	$f_{27} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{12} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
9	$f_{26} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	-
10	$f_{25} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	-
11	$f_{24} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	-
12	$f_{23} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	-
13	$f_{22} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	-
14	$f_{21} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	-
15	$f_{20} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	-
16	$f_{19} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	-
17	$f_{18} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	-
17	$f_{17} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	-

Résultats numériques : cas test 2

Cadre :

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{\bar{A}_5 = (a_*, 0.82a_*), \\ \bar{A}_6 = (a_*, 1.2a_*)\},$$

et

$$\frac{\text{card}(\mathcal{F}_{\text{disc}})}{\text{card}(\mathcal{F})} \approx 0.2.$$

Conclusions :

- Δ_2 réplique plus fidèlement Δ_ε que Δ_1 .
- $\bar{A}_0 = (a_*, a_*)$ est le meilleur coefficient à chaque étape.
- Δ_1 sélectionne des chargements qui ne discriminent pas précisément \bar{A}_0 des autres coefficients de \mathcal{A}_1 .

Step	Δ_ε	Δ_1
1	$f_1 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	$f_{29} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
2	$f_2 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	$f_{28} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
3	$f_3 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	$f_{27} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
4	$f_4 \in \mathcal{F}_{\text{disc}}$	$f_{26} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
5	$f_{29} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{25} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
6	$f_{28} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{24} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
7	$f_{12} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{23} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
8	$f_{27} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{22} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
9	$f_{26} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{21} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
10	$f_{25} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{20} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
11	$f_{24} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{19} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
12	$f_{23} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{18} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
13	$f_{22} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{17} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
14	$f_{21} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{16} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
15	$f_{20} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{15} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
16	$f_{19} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{14} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
17	$f_{18} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_{13} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$
17	$f_{17} \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$	$f_1 \in \mathcal{F}_{\text{non-disc}}$